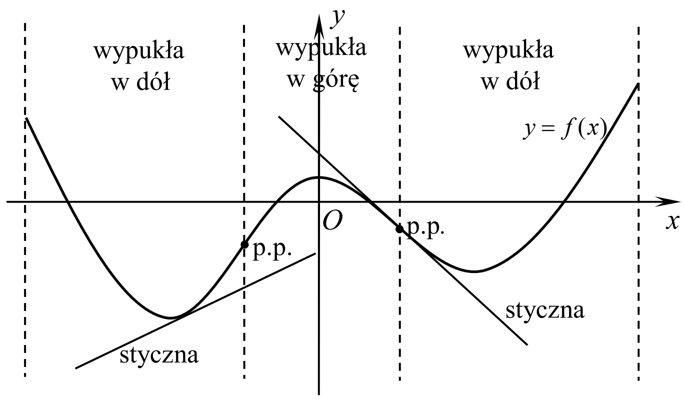
Wybrane zastosowania pochodnych – wypukłość i punkty przegięcia krzywej

Definicja 2. Wykres funkcji $y = f(x)$ różniczkowalnej w punkcie x_0 nazywamy *wypukłym w dół* (*wypukłym w górę*) w tym punkcie, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo S punktu x_0, że dla każdego $x \in S$ punkty $P(x, f(x))$ wykresu leżą powyżej (poniżej) stycznej poprowadzonej do wykresu w punkcie o odciętej x_0.

Wykres funkcji $y = f(x)$ wypukły w dół (w górę) w każdym punkcie pewnego zbioru X nazywamy wypukłym w dół (w górę) w tym zbiorze.



Rys. 4. Ilustracja pojęcia wypukłości oraz punktów przegięcia krzywej

Definicja 3. Punkt $P(x_0, f(x_0))$, gdzie $x_0 \in (a, b)$ nazywamy *punktem przegięcia* wykresu funkcji f, jeżeli wykres ten jest:

- wypukły w dół w sąsiedztwie $S_-(x_0, \delta)$ i wypukły w górę w sąsiedztwie $S_+(x_0, \delta)$, lub
- wypukły w górę w sąsiedztwie $S_-(x_0, \delta)$ i wypukły w dół w sąsiedztwie $S_+(x_0, \delta)$.

Twierdzenie 6.

1. Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to wykres funkcji f jest w tym przedziale wypukły w dół.

2. Jeżeli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to wykres funkcji f jest w tym przedziale wypukły w górę.

Twierdzenie 7 (*warunek konieczny istnienia punktu przegięcia*).

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ ma w x_0 punkt przegięcia i istnieje ciągła pochodna rzędu drugiego funkcji f w pewnym otoczeniu punktu x_0, to $f''(x_0) = 0$.

Uwaga. Wykres funkcji może mieć punkty przegięcia jedynie w punktach zerowania się jej drugiej pochodnej albo w punktach, w których ta pochodna nie istnieje lub jest równa nieskończoność.

Twierdzenie 8 (*I warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia*).
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w otoczeniu $U(x_0, \delta)$ i dwukrotnie różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0, \delta)$ punktu x_0, a ponadto:

$$f''(x) > 0 \quad (\text{lub } f''(x) < 0) \quad \text{dla } x \in S_-(x_0, \delta) \quad \text{i}$$
$$f''(x) < 0 \quad (\text{lub } f''(x) > 0) \quad \text{dla } x \in S_+(x_0, \delta),$$

(tzn. przy przejściu przez punkt x_0 druga pochodna zmienia znak), to punkt $P(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$.

Twierdzenie 9 (*II warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia*).
Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz

1) $f''(x_0) = f'''(x_0) ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, n – nieparzyste $(n \geq 3)$,
3) $f^{(n)}(x)$ jest ciągła w punkcie x_0,

to punkt $P(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$.

Uwaga. Schemat badania rodzaju wypukłości oraz wyznaczania punktów przegięcia wykresu funkcji jest analogiczny, jak podany wcześniej schemat badania monotoniczności i wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji, przy czym wnioski dotyczące wypukłości oraz punktów przegięcia formułujemy w oparciu o badanie pochodnej rzędu drugiego.

Przykład 8. Zbadać kształt wypukłości oraz wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 8\ln(x+1)$, b) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

Rozwiązanie.

a) Dziedzina: $D_f = (-1,+\infty)$.

Obliczamy pierwszą, a następnie drugą pochodną:

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{8}{x+1},$$

$$f''(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}, \quad D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Przyrównując drugą pochodną do zera wyznaczamy punkty, w których krzywa będąca wykresem badanej funkcji może mieć punkty przegięcia:

$$f''(x) = 0 \iff \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2} = 0 \iff 2x^2+4x-6=0 \iff x=-3 \text{ lub } x=1 \cdot$$

Zatem jedynie dla $x=1$ (drugi z wyznaczonych punktów nie należy do dziedziny funkcji) wykres funkcji może mieć punkt przegięcia.

Rozwiązujemy odpowiednie nierówności:

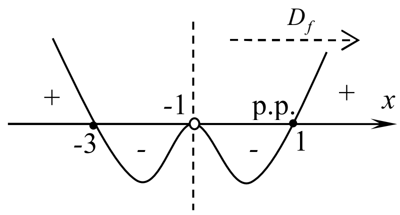
$$f''(x) > 0 \iff \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2} > 0 \iff$$

$$\iff (2x^2+4x-6)(x+1)^2 > 0 \iff$$

$$\iff 2(x+3)(x-1)(x+1)^2 > 0 \iff$$

$$\iff x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty) \text{ (rys. 8.5)},$$

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-3,1) \setminus \{-1\}.$$



Rys. 5. Ilustracja do przykładu 8a)

Biorąc pod uwagę powyższe obliczenia oraz uwzględniając dziedzinę funkcji (rysunek 5) można sformułować następujące wnioski:

1) w przedziale $(-1,1)$ wykres funkcji jest wypukły w górę,

2) w przedziale $(1,+\infty)$ wykres funkcji jest wypukły w dół,

3) dla $x=1$ wykres funkcji posiada punkt przegięcia (druga pochodna przy przejściu przez ten punkt zmienia znak) i $y_{p.p.} = f(1) = -2 + 8\ln 2$.

b) Dziedzina: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + x^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1},$$

$$f''(x) = \frac{0 - 1 \cdot (4x+2)}{(2x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-4x-2}{(2x^2 + 2x + 1)^2}\ , \quad D_{f''} = \mathbb{R}.$$

Przyrównujemy drugą pochodną do zera:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-2}{(2x^2+2x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

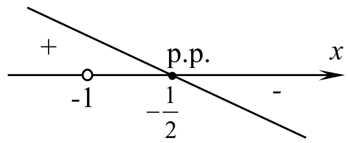
Czyli dla $x = -\frac{1}{2}$ funkcja może mieć punkt przegięcia. Aby to rozstrzygnąć, a jednocześnie zbadać kształt wypukłość rozwiązujemy odpowiednie nierówności. Ponieważ wyrażenie występujące w mianowniku drugiej pochodnej ma dla każdego x wartość dodatnią zatem:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-2}{(2x^2+2x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x-2 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right),$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$



Rys. 6. Ilustracja do przykładu 8b)

Biorąc pod uwagę powyższe obliczenia oraz uwzględniając dziedzinę funkcji (rysunek 6) można stwierdzić:

1) w przedziale $(-\infty, -1)$ i $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ wykres funkcji jest wypukły w dół,

2) w przedziale $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ wykres funkcji jest wypukły w górę,

3) dla $x = -\frac{1}{2}$ wykres funkcji posiada punkt przegięcia o rzędnej

$$y_{p.p.} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = \operatorname{arctg}\left(-1\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadać kształt wypukłości oraz wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji:

66. $f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+5x-1$,

67. $f(x)=x^5+5x^4+x-3$,

68. $f(x)=x^2-\frac{8}{x}$,

69. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$,

70. $f(x)=x\mathrm{e}^{-2x}$,

71. $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$,

72. $f(x)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$,

73. $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-3x}$,

74. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln(x-3)$,

75. $f(x)=\ln(1+x^2)$,

76. $f(x)=-x\ln x$,

77. $f(x)=\frac{3}{x}+\ln 2x$,

78. $f(x)=\ln(x^2-8)$,

79. $f(x)=-2x^2+\ln\frac{1}{x-1}$,

80. $f(x)=2x-\operatorname{arcctg} x$,

81. $f(x)=\arcsin\frac{x}{x+1}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch